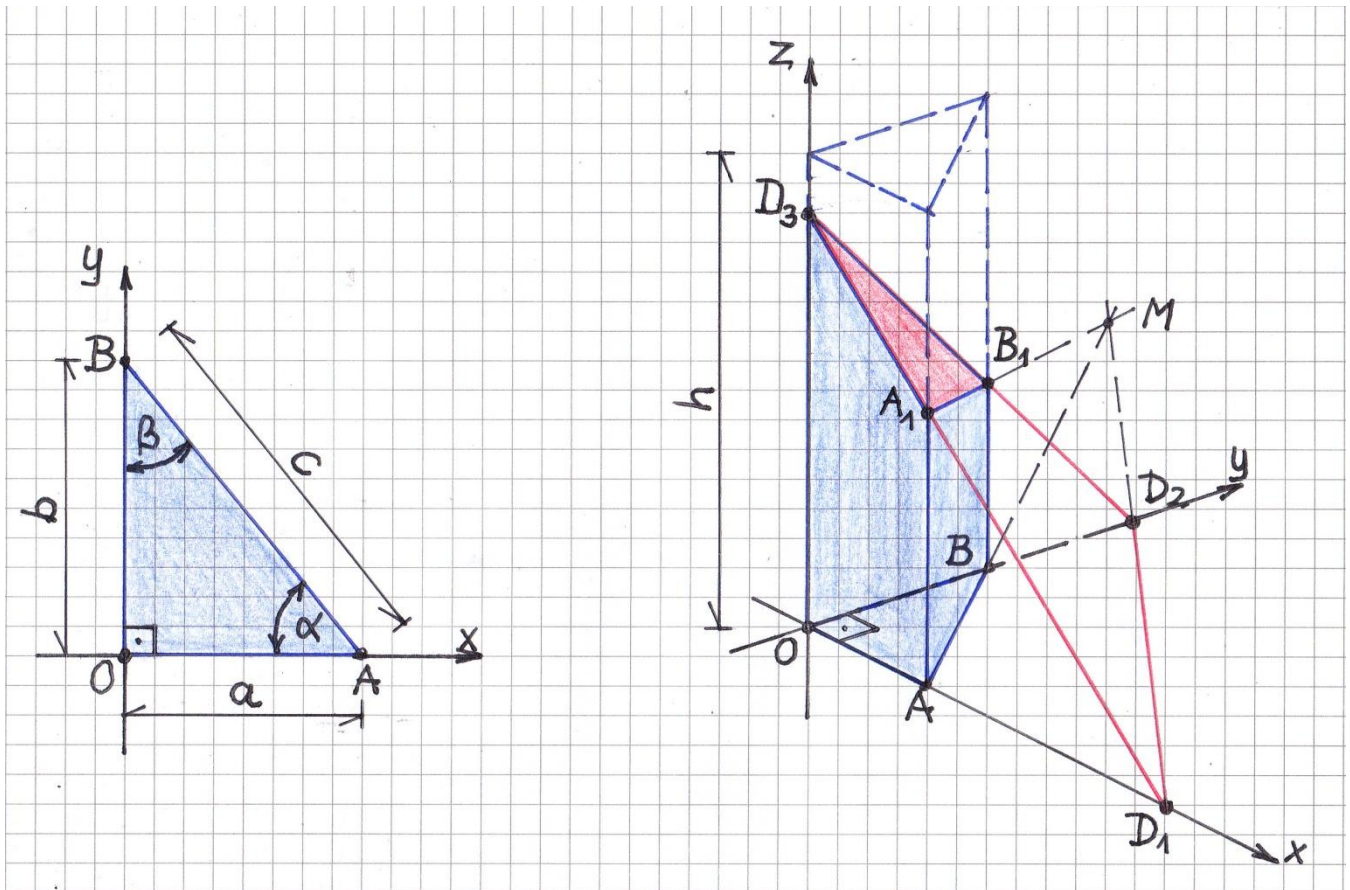


Egy derékszögű háromszög keresztmetszetű egyenes hasáb síkmetszete adatainak meghatározása számítással

Ez a dolgozat bizonyos értelemben folytatása az előzőnek, melynek jele és címe: **ED** és **Egy sík és a koordinátságok metszésvonalainak meghatározása.**

Ezt azért hozzuk fel, mert több ott levezetett összefüggést itt is felhasználunk.

Jelen feladatunkhoz tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Itt azt látjuk, hogy egy derékszögű háromszög alapú / keresztmetszetű egyenes hasábot elmetsettünk egy általános helyzetű metszősíkkal.

A feladat: meghatározni a ferde metszeti háromszög minden lényeges adatát.

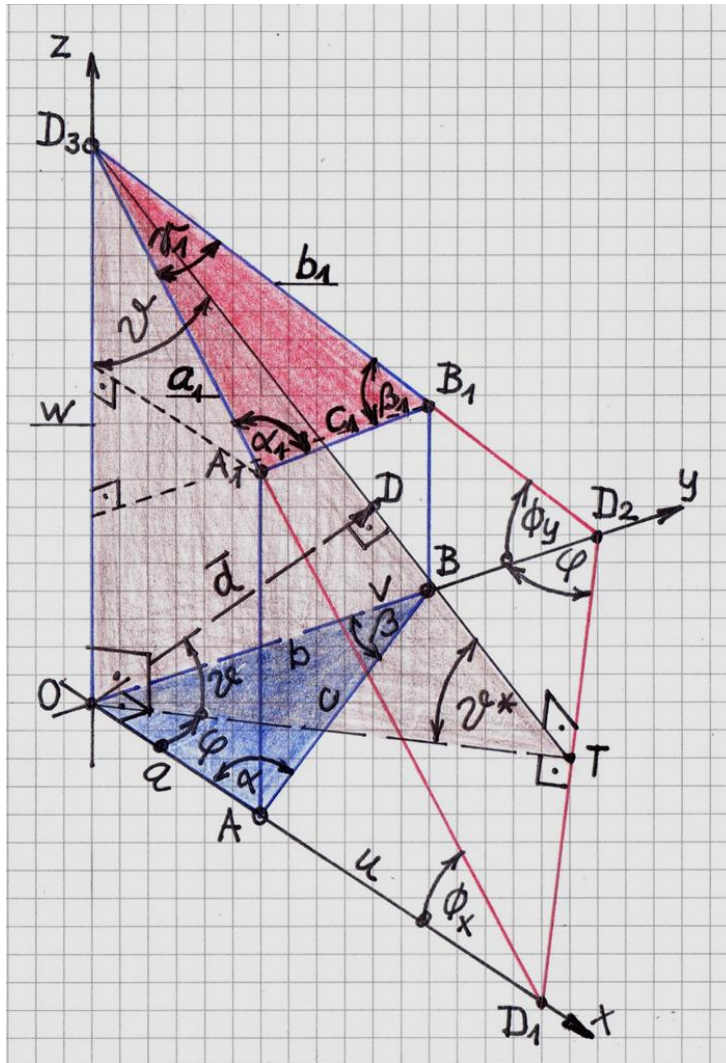
Először az 1. ábra bal oldalán látható alapháromszög adatai közti összefüggéseket írjuk fel, melyek nem igényelnek magyarázatot:

$$\underline{c = \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \rightarrow \underline{\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}}, \quad (2)$$

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \rightarrow \underline{\beta = 90^\circ - \alpha}. \quad (3)$$

A továbbiakhoz tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

Itt az alkalmazandó paramétereket is feltüntettük. A számítást ezekkel végezzük.

A $D_1D_2D_3$ nyomháromszögével adott metszősík helyzetét leírhatjuk az (u, v, w) tengelymetszetekkel, illetve a (d, φ, ϑ) polárkoordinátákkal is, ahol d a metszősík távolságvektora. Az ezekre vonatkozó alapvető összefüggéseket ED -ből átvéve:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{v}, \quad (5)$$

$$\sin \vartheta = \frac{d}{w}. \quad (6)$$

Az 1. és a 2. ábra összehasonlításából látszik, hogy metszet addig képződhet, amíg fennáll az alábbi korlátozó feltétel:

$$w \leq h; \quad (7)$$

most (6) és (7) szerint kapjuk, hogy

$$\frac{d}{\sin \vartheta} \leq h \rightarrow \sin \vartheta \geq \frac{d}{h} \rightarrow \underline{\vartheta \geq \arcsin \frac{d}{h}}. \quad (8)$$

Szintén az **ED** - ből vesszük át az alábbi összefüggéseket:

$$u = \frac{d}{\cos \varphi \cdot \cos \vartheta}, \quad (9)$$

$$v = \frac{d}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta}. \quad (10)$$

Most kiszámítjuk a ϕ_x és a ϕ_y szögek tangensét. A 2. ábra alapján:

$$\operatorname{tg} \phi_x = \frac{w}{u}, \quad \operatorname{tg} \phi_y = \frac{w}{v}; \quad (11)$$

most (6), (9), (10) és (11) szerint:

$$\operatorname{tg} \phi_x = \frac{w}{u} = \frac{\frac{d}{\sin \vartheta}}{\frac{d}{\cos \varphi \cdot \cos \vartheta}} = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \phi_y = \frac{w}{v} = \frac{\frac{d}{\sin \vartheta}}{\frac{d}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta}} = \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}. \quad (13)$$

Az a_1 és b_1 metszeti háromszög - oldalak számítása a 2. ábra szerint, (12), (13) - mal is:

$$a_1 = \frac{a}{\cos \phi_x} = a \cdot \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \phi_x)^2} = a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{a_1 = a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}}}. \quad (14)$$

Hasonlóan eljárva:

$$b_1 = \frac{b}{\cos \phi_y} = b \cdot \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \phi_y)^2} = b \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{b_1 = b \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}}}. \quad (15)$$

Most áttérünk a γ_1 szög számítására. Ezt koszinusz - tétellel végezzük, a $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3$ három - szögben. Eszerint:

$$(\overline{D_1D_2})^2 = (\overline{D_1D_3})^2 + (\overline{D_2D_3})^2 - 2 \cdot \overline{D_1D_3} \cdot \overline{D_2D_3} \cdot \cos \gamma_1 ; \quad (16)$$

ehhez Pitagorász - tétellel, a 2. ábra alapján:

$$(\overline{D_1D_2})^2 = u^2 + v^2 ; \quad (17)$$

$$(\overline{D_1D_3})^2 = u^2 + w^2 ; \quad (18)$$

$$(\overline{D_2D_3})^2 = v^2 + w^2 . \quad (19)$$

Majd (16), (17), (18) és (19) szerint:

$$u^2 + v^2 = u^2 + w^2 + v^2 + w^2 - 2 \cdot \sqrt{u^2 + w^2} \cdot \sqrt{v^2 + w^2} \cdot \cos \gamma_1 ; \text{ egyszerűsítve:}$$

$$0 = 2 \cdot w^2 - 2 \cdot \sqrt{u^2 + w^2} \cdot \sqrt{v^2 + w^2} \cdot \cos \gamma_1 ; \text{ rendezve:}$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{w}{\sqrt{u^2 + w^2}} \cdot \frac{w}{\sqrt{v^2 + w^2}} . \quad (20)$$

Ámde a 2. ábra szerint írhatjuk, hogy

$$\frac{w}{\sqrt{u^2 + w^2}} = \sin \phi_x , \quad (21)$$

$$\frac{w}{\sqrt{v^2 + w^2}} = \sin \phi_y , \quad (22)$$

így (20), (21) és (22) - vel:

$$\cos \gamma_1 = \sin \phi_x \cdot \sin \phi_y . \quad (23)$$

Most trigonometriai átalakítással és (12) - vel:

$$\sin \phi_x = \frac{\operatorname{tg} \phi_x}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \phi_x)^2}} = \frac{\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} , \text{ tehát:}$$

$$\sin \phi_x = \frac{\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} ; \quad (24)$$

hasonlóképpen, (13) - mal is:

$$\sin \phi_y = \frac{\operatorname{tg} \phi_y}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \phi_y)^2}} = \frac{\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} , \text{ tehát:}$$

$$\sin \phi_y = \frac{\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} . \quad (25)$$

Ezután (23), (24) és (25) - tel:

$$\cos \gamma_1 = \frac{\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}}. \quad (26)$$

Innen a szög maga:

$$\gamma_1 = \arccos \left[\frac{\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \right]. \quad (27)$$

Most a c_1 oldalhosszat határozzuk meg, koszinusz - tétellel. A 2. ábra alapján:

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \cos \gamma_1 ; \quad (28)$$

majd (14), (15), (26) és (28) szerint:

$$\begin{aligned} c_1^2 &= a^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 \right] + b^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 \right] - \\ &\quad - 2 \cdot a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2} \cdot b \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2} \cdot \frac{\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}} = \\ &= a^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 \right] + b^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 \right] - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} = \\ &= a^2 + b^2 + a^2 \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 + b^2 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} = \\ &= a^2 + b^2 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} \cdot (a^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi) = \\ &= a^2 + b^2 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} \cdot (a \cdot \cos \varphi - b \cdot \sin \varphi)^2 = a^2 + b^2 + \left(\frac{a \cdot \cos \varphi - b \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2, \text{ azaz:} \\ c_1^2 &= a^2 + b^2 + \left(\frac{a \cdot \cos \varphi - b \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2, \text{ innen pozitív gyökvonással:} \\ c_1 &= \sqrt{a^2 + b^2 + \left(\frac{a \cdot \cos \varphi - b \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}. \quad (29) \end{aligned}$$

A β_1 szöget szinusztétellel számítjuk, a 2. ábra piros háromszögéből:

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a_1}{c_1} \rightarrow \sin \beta_1 = \frac{a_1}{c_1} \cdot \sin \gamma_1 = \frac{a_1}{c_1} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_1} ; \quad (30)$$

most (14), (26), (29) és (30) szerint:

$$\sin \beta_1 = \frac{a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + \left(\frac{a \cos \varphi - b \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}}\right)^2} ; \text{átalakításokkal:}$$

$$\sin \beta_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos \varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} ; \text{most (2) - vel is:}$$

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2 - \frac{\left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{\left[1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2\right] - \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2\right] - \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2 = \\ &= 1 + \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} ; \end{aligned} \quad (*)$$

ezzel folytatva:

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{\sin^2 \vartheta}}{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} ; \text{részletszámítással:} \\ \frac{\frac{1}{\sin^2 \vartheta}}{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2} &= \frac{1}{\sin^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta}}} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \vartheta} = \frac{1}{1 - \cos^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \vartheta} = \\ &= \frac{1}{1 - \cos^2 \vartheta \cdot (1 - \sin^2 \varphi)} = \frac{1}{1 - \cos^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi} , \text{ ezzel folytatva:} \end{aligned}$$

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \cos^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi}}, \text{ tehát:}$$

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi}}. \quad (31)$$

Innen kapjuk, hogy

$$\beta_1 = \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos \varphi \cdot \cos \vartheta)^2}} \right]. \quad (32)$$

Végül az α_1 szögre kapjuk, hogy:

$$\underline{\underline{\alpha_1 = 180^\circ - (\beta_1 + \gamma_1)}}. \quad (33)$$

Még számítsuk ki a metszeti háromszög területét is! Ismert képletekkel:

$$T = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot (a_1 \cdot \sin \gamma_1) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2} \cdot b \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_1};$$

rendezve és folytatva:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}} \right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 \right] - \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2}; \text{ most } (*) - \text{ gal is:}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \vartheta}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\sin \vartheta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\cos(90^\circ - \vartheta)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\cos \vartheta^*} = \frac{T_{vet}}{\cos \vartheta^*},$$

tehát:

$$\underline{\underline{T = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\sin \vartheta} = \frac{T_{vet}}{\cos \vartheta^*}}}, \quad (34)$$

ahogyan azt a Geometria is tanítja. Ezzel kitűzött feladatunkat megoldottuk.
Eredményeink összefoglalása:

$$a_1 = a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2},$$

$$b_1 = b \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2},$$

$$c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + \left(\frac{a \cdot \cos \varphi - b \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2};$$

$$\gamma_1 = \arccos \left[\frac{\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \right],$$

$$\beta_1 = \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos \varphi \cdot \cos \vartheta)^2}} \right],$$

$$\alpha_1 = 180^\circ - (\beta_1 + \gamma_1);$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\sin \vartheta}.$$

Megjegyzések:

M1. Az 1. ábra jobb oldali részén feltüntettük a *Desargues - tétel* szerint kiadódó **M** pontot is – [1].

M2. Feltesszük, hogy nem okoznak hibát az olyan átalakítások, mint például ez:

$$\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \vartheta}} = \frac{1}{\sin \vartheta}.$$

M3. A (29) képletet is átírhatjuk a levezetése után alkalmazott átalakítással:

$$c_1 = a \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2} ; \text{ vagy megint más alakba írva:}$$

$$c_1 = a \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2} . \quad (29^*)$$

M4. Feladatunkat így is megfogalmazhatjuk:

~ adott: $(a, b, h, \gamma = 90^\circ); (d, \varphi, \vartheta);$

~ keresett: $(a_1, b_1, c_1); (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1); T.$

M5. Talán kicsit meglepő, de a **d** távolság - adat és a **h** hossz - adat nem szerepel végeredményeinkben, csak a (8) szerinti korlátozásban, ott is csak az arányuk. A **z** - tengely mindkét irányában végtelen hosszú hasáb esetén már ez sem játszik szerepet.

M6. Látható, hogy az első pillantásra nehéznek tűnő számítások valójában nem lépnek ki a középiskolai matematikai ismeretkörből.

M7. A (7) összefüggésbe beírhattuk volna, hogy $w > 0$. Nem erőltettük az ilyen típusú kikötéseket, mert nem jelent erős megszorítást pl. ez utóbbi sem. Ugyanis, ha $w < 0$ lenne, akkor az **xy** síkra tükrözve az eredeti helyzetet, kapnánk a $w > 0$ - nak megfelelőt. Egy konkrét feladat megoldásánál sok paraméter felett szabadon rendelkezhetünk, megkönnyítve ezzel saját munkánkat is.

M8. Menet közben előállt néhány önmagában is érdekes eredmény; ilyen pl. (23) is.

M9. Ha az Olvasónak jobban tetszene az (u, v, w) paraméterekkel való munka, akkor fel -, illetve átírhatja magának az eredményeket, tetszése szerint. Nekünk tetszik a metszősík itt kedvezményezett (d, φ, ϑ) polárkoordinátás megadási módja.

Irodalom:

[1] – **Strommer Gyula:** Ábrázoló geometria

2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974., 134. o.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnökstanár

Sződliget, 2014. 11. 11.